

广义证据理论中的基本概率指派生成方法

邓勇^{1,3}, 韩德强²

(1. 西南大学计算机与信息科学学院, 400715, 重庆; 2. 西安交通大学综合自动化研究所, 710049, 西安;
3. 上海交通大学电子信息与电气工程学院, 200240, 上海)

摘要: 鉴于基本概率指派生成对证据理论的研究具有重要的意义, 文中针对辨识框架不完整情况提出了一种强约束广义基本概率指派赋值方法, 新方法可以生成空集不为零的广义基本概率指派赋值, 该数值的大小反映了系统是开放世界的可能性. 针对辨识框架完整情况提出了一种弱约束基本概率指派赋值方法, 该方法在样本与表示模型之间不相交时, 也可以给出样本与模型相似性度量的数值, 根据所提出的策略生成弱约束的基本概率指派. 算例表明了所提出方法的有效性.

关键词: 广义证据理论; 广义基本概率指派; 目标识别; 模糊数; 相似性测度

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)02-0034-05

Methods to Determine Generalized Basic Probability Assignment in Generalized Evidence Theory

DENG Yong^{1,3}, HAN Deqiang²

(1. College of Computer and Information Sciences, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. Institute of Integrated Automation, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

3. School of Electronics Information and Electric Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Determination of the basic probability assignment (BPA) is the first step to use evidence theory. How to determine BPA is still an open issue. Two methods, namely strong constrain method and weak constrain method, are proposed to deal with open world and close world respectively. In the framework of the proposed generalized evidence theory, a strong constrain method for determination of generalized basic probability assignment (GBPA) is developed. Compared with the existing methods, the new method can generate GBPA without the constrain that the empty set should be set zero. In addition, the value of the empty illustrates the possibility degree that the frame of discernment is not complete. A weak constrain method is also presented to generate BPA in the close world. The weak constrain can determine the BPA even the sample does not cross with the representation model. Some numerical examples are used to illustrate the efficiency of the proposed methods.

Keywords: generalized evidence theory (GET); generalized basic probability assignment (GBPA); target recognition; fuzzy number; similarity measure

Dempster-Shafer 证据理论在不确定信息表示 的基本概率指派 (Basic Probability Assignment, 方面优于概率论, 一个主要的原因在于证据理论中 BPA) 是在辨识框架命题的幂集空间之上进行分配,

收稿日期: 2010-04-02. 作者简介: 邓勇(1975—), 男, 教授, 博士生导师. 基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目 (2007CB311006); 国家自然科学基金资助项目 (60874105, 60904099); 教育部新世纪优秀人才基金资助项目 (NCET-08-0345); 上海市青年科技启明星计划资助项目 (09QA1402900); 上海市教育委员会重点学科建设资助项目 (J50704); 重庆市自然科学基金资助项目 (CSTC, 2010BA2003).

这样就能够比仅仅只在单子集构成的基本事件空间上分配的概率表达更不确定的信息. 特别地,当 BPA 只在辨识框架的单子集命题上进行分配时, BPA 就转换为概率论中的概率,从这个角度来看, BPA 是向下兼容概率的^[1-2].

对概率论中基本事件空间中的事件,可以使用统计的方法确定概率的大小,但是如何确定 BPA 仍然是一个有待解决的问题,至今没有一个统一的方法. 目前,国内外在该方向已有了一些研究工作^[3-8].

本文的主要工作是在所提出的广义证据理论框架下,提出了广义基本概率指派的生成方法,能够处理辨识框架不完整的情况,且利用已有样本数据基于模糊数学建立了多命题表示模型,为解决多子集命题的广义基本概率指派生成提供了一条新的途径.

1 广义证据理论

限于篇幅,本节简单介绍一些所涉及的广义证据理论的内容,详细内容见文献[9].

定义 1 设 U 为开放世界的辨识框架, U 的幂集 2^U 构成命题集合, $\forall A \subset \Theta$, 如果函数 $m: 2^U \rightarrow [0, 1]$ 满足

$$\sum_{A \subset U} m(A) = 1 \tag{1}$$

则称 m 为框架 U 上的广义基本概率指派 (Generalized Basic Probability Assignment, GBPA). GBPA 与经典 BPA 的区别是没有 $m(\emptyset)$ 等于 0 的限制,空集也可以是焦元,也可以是核的一部分. 如果 $m(\emptyset)$ 等于 0,则 GBPA 就退化为经典的 BPA.

在 GBPA 基础上,我们提出广义组合规则 (Generalized Combination Rule, GCR).

定义 2 设 $\emptyset_1 \cap \emptyset_2 = \emptyset$, 也即空集和空集的交集仍然是空集,给定两个 GBPA,定义 GCR 为

$$m(A) = \frac{(1 - m(\emptyset)) \sum_{\substack{B \cap C = A \\ B \cap C = \emptyset}} m_1(B)m_2(C)}{1 - K} \tag{2}$$

$$K = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B)m_2(C) \tag{3}$$

$$m(\emptyset) = m_1(\emptyset)m_2(\emptyset) \tag{4}$$

$$m(\emptyset) = 1 \quad \text{当且仅当} \quad K = 1 \tag{5}$$

2 强约束 GBAP 生成方法

本节首先提出基于模糊数学的多子集命题表示模型,在此基础上提出一种强约束 GBPA 生成方法.

2.1 多子集命题的模糊数表示

如何建立多子集命题表示模型一直未能有效地解决,影响了 BPA 合理生成. 本节提出一种多子集命题表示方法,前提条件是系统具有一定的样本数据,这在实际工程中通常能得到满足.

推广模糊数能更好地度量不确定信息,一个扩展模糊数 $A = (a, b, c; w)$ 具有如下属性的隶属函数 $f^{[10]}$

- (1) f 是一个从实数集 $\mathbf{R}$ 到 $[0, w]$ 的连续映射, $0 \leq w \leq 1$;
- (2) 当 $x \in (-\infty, a]$ 时, $f(x) = 0$;
- (3) 在 $[a, b]$, f 严格单调增;
- (4) 对 $x \in [b, c]$, $f(x) = w$, 其中 w 为常数,且 $0 \leq w \leq 1$;
- (5) 在 $[c, d]$, f 严格单调减;
- (6) 对 $x \in [d, +\infty]$, $f(x) = 0$.

其中, a, b, c 均是实数. 如果 $w = 1$, A 就是正则三角模糊数. 图 1 给出了两个推广模糊数

$$A = (a_1, a_2, a_3, w_1), \quad 0 \leq w_1 \leq 1$$
$$B = (b_1, b_2, b_3, w_2), \quad 0 \leq w_2 \leq 1$$

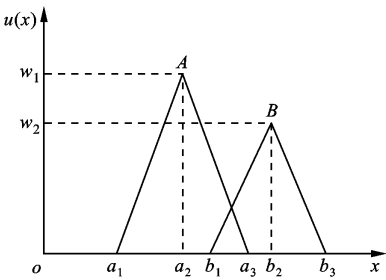


图 1 类别属性三角模糊数

在给定一定样本后,针对样本的某一个属性,可以确定该属性的最小值、最大值和平均值,基于这 3 个属性值可以建立一个三角形模糊数来描述命题. 以 Iris data 数据 (<http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Iris>) 为例, Iris 数据共 150 个样本,每个样本有 4 个属性 (例如花萼长度就是其中的一个属性). 这 150 个样本分为 3 个类别,分别是 Setosa, Versicolour 和 Virginica,每个类别各有 50 个样本.

图 2 给出 Setosa 类随机抽取 30 个样本后,针对花萼长度这个属性生成的模糊三角形命题表示模型. 构成该三角形的 3 个特征值分别是这 30 个样本的最小值、平均值和最大值,在本例中,30 个样本中花萼长度的最小值为 4.3 cm,平均值为 5.1 cm,最大值为 5.8 cm,则构成了图 2 的三角形模糊数 (4.3 cm, 5.1 cm, 5.8 cm). 类似地,图 3 给出了所有 3 个

类别随机抽取 30 个样本生成的花萼长度属性的模糊三角形命题表示模型,其中多子集命题可以用单子集命题三角形的交叠部分来表示,这个交叠部分通常为推广三角形模糊数(该类型模糊数的特点是隶属度的最大值不为 1)。

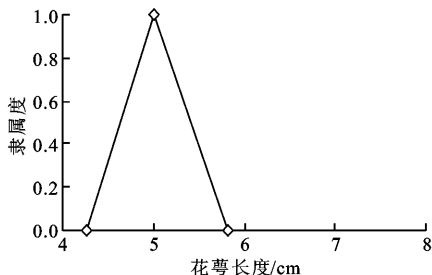


图2 Setosa 的鸢尾花花萼长度三角形模糊数描述

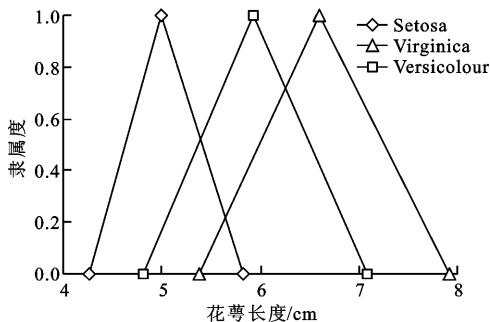


图3 3类鸢尾花花萼长度的三角形模糊数描述

2.2 强约束 GBPA 生成方法

强约束的思想是,如果一个待识别样本没有在某类别的最小值和最大值之间,则完全不认为该样本属于某一类目标.强约束 GBPA 生成策略如下。

(1)当样本与某命题的三角模糊数表示模型相交时,相交点的纵坐标即为该样本支持命题的 GBPA。

(2)当样本与多命题的三角模糊数表示模型相交时,纵坐标高点为该样本支持命题的 GBPA,纵坐标低点为该样本支持多子集命题的 GBPA。

(3)当样本处于多个多命题的三角模糊数表示模型相交点时,纵坐标高点为该样本各个单子集命题的 GBPA,纵坐标低点为该样本支持多子集命题的 GBPA。

(4)以上生成的 GBPA 如果累积之和超过 1,则将它们归一化且设 $m(\emptyset)$ 的值为 0。如果累积之和未超过 1,则生成 $m(\emptyset)$ 。

(5) $m(\emptyset)$ 的生成准则是,当样本与所有命题表示的三角形模糊数没有相交时, $m(\emptyset)$ 等于 1。当所

有其他单子集命题和多子集命题的 GBPA 累加之和小于 1 时,将 1 减去所有命题的 GBPA 累加的值赋给 $m(\emptyset)$ 。

3 弱约束 GBPA 生成方法

弱约束生成可以在样本与表示模型之间没有交点时也可以生成 GBPA,最关键的是确定样本与表示模型之间的相似性测度。关于模糊数相似性测度的研究很多,Chen 等^[10]提出了基于重心的方法。我们分析了该方法的缺陷,提出了基于惯性矩的推广三角模糊数相似性测度,具体的方法和应用可以参考文献[11]。基于回转半径的模糊数 A 和 B 之间的相似度 $S(A, B)$ 可表示为

$$S(A, B) = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^3 |a_i - b_i|}{3} \right] \cdot (1 - |(r_y^A - r_y^B)|)^{B(S_A, S_B)} \frac{\min(r_x^A, r_x^B)}{\max(r_x^A, r_x^B)} \quad (6)$$

式中

$$B(S_A, S_B) = \begin{cases} 1, & S_A + S_B > 0 \\ 0, & S_A + S_B = 0 \end{cases} \quad (7)$$

S_A, S_B 分别是三角模糊数 A 和 B 的长度

$$S_A = a_3 - a_1, \quad S_B = b_3 - b_1 \quad (8)$$

弱约束 GBPA 的生成策略归纳如下:

- (1)基于推广模糊数确定样本与辨识框架中所有命题的相似性大小;
- (2)样本与空集命题的相似性设定为 0;
- (3)归一化所有命题的相似性可以得到命题的 GBPA。

4 强约束和弱约束 GBPA 生成算例

4.1 强约束生成方法

选用鸢尾花(iris)数据来验证强约束 GBPA 生成方法。在鸢尾花数据分类问题中,有 3 种鸢尾花,即 Setosa(a), Versicolor(b)和 Virginica(c)。Iris 数据总共包含 150 个样本, a, b 和 c 每个品种含有 50 个样本。Iris 数据采集了鸢尾花的 4 个属性,即花萼长度(SL)、花萼宽度(SW)、花瓣长度(PL)和花瓣宽度(PW)。

由于强约束生成方法主要用于辨识框架不完整情况,在本实验中,随机地从 a 和 c 中的花萼长度(SL)这个属性中各选择了 40 个样本作为统计证据生成类别模型,其中 a 的三角模糊数为(4.3 cm,

5.04 cm,5.8 cm), c 的三角模糊数为(5.6 cm,6.72 cm,7.7 cm),本次实验中 a 和 c 有交叠部分. 实验选取 4 到 8 这个区间,每隔 0.1 递增产生一个样本. 实验结果如图 4 所示.

由图 4 可以看出:

(1)当样本点处于 a 和 c 之外时,例如样本点在 4 的位置,由于和 a 、 c 均无相交,系统认为 $m(a)=0$, $m(c)=0$,所有的 GBPA 都分配给空集 $\varnothing$;

(2)当样本点右移跨入类别 a 时, $m(a)$ 的数值逐渐增大,在 5.0 cm 时最大, $m(a)=0.98$, $m(\varnothing)=0.02$,这说明系统认为样本是 a 的可能性很大, $m(\varnothing)$ 数值很小,表明此样本提示不在辨识框架的可能性很小;

(3)当样本点继续右移跨入类别 c 时,由于 a 和 c 相交叠,此时生成了 $m(a,c)$ 的焦元,但由于数值较小, $m(\varnothing)$ 数值很大,表明在这个区段的样本属于辨识框架外的可能性很大,这是与实际情况相符合的,我们未在图中生成 b 类的表示模型,而 b 类的样本大多集中在这个区域,换言之,在这个区域的样本属于 b 的可能性很大,因为辨识框架不完整,系统得出样本不属于 a 和 c 的可能性很大;

(4)当样本点继续右移出 a 类,跨入类别 c 时,由于样本不与类别 a 相交,此时根据强约束生成的规则, $m(a)=0$,也就是认为样本不再可能属于 a 类,但 $m(c)$ 的数值逐渐增大,在 6.7 cm 附近达到最大值 $m(c)=0.97$,此时 $m(\varnothing)=0.03$,这说明系统认为样本是 c 的可能性很大, $m(\varnothing)$ 数值很小表明此样本提示不在辨识框架的可能性很小;

(5)当样本点继续右移,移出 c 类时,由于样本不与类别 a 和 c 相交,系统认为 $m(a)=0$, $m(c)=0$,所有的 GBPA 都分配给空集 $\varnothing$;

由此可以看出,基于强约束的 GBPA 生成方法的结果是比较符合实际情况的. 在另外一个实验中,随机地从 a 和 c 中的花瓣长度(PL)这个属性中各选择了 40 个样本作为统计证据生成类别模型,其中 a 的三角模糊数为(1.0 cm,1.5 cm,1.9 cm), c 的三角模糊数为(4.8 cm,5.6 cm,6.8 cm),本次实验中 a 和 c 没有交叠部分,如图 5 所示. 实验选取 0.5 到 8 这个区间,每隔 0.1 递增产生一个样本,实验结果如图 5 所示. 本次实验结果与上次实验相类似,不同之处在于,由于 a 和 c 没有交叠部分,始终有 $m(a,c)=0$.

4.2 弱约束生成方法

弱约束生成方法是确认系统属于封闭世界,也

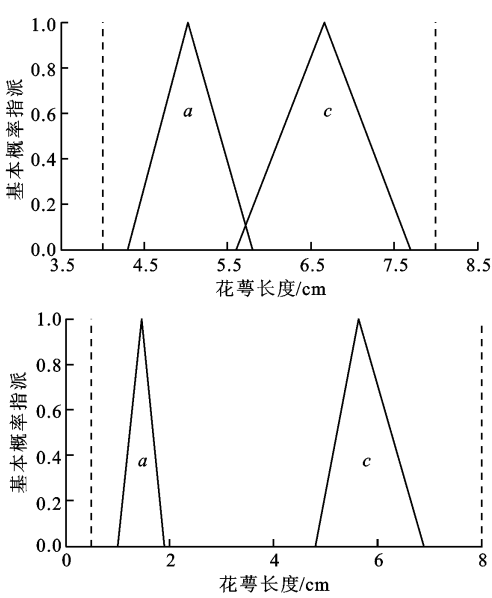


图 4 属性花萼长度生成的 GBPA

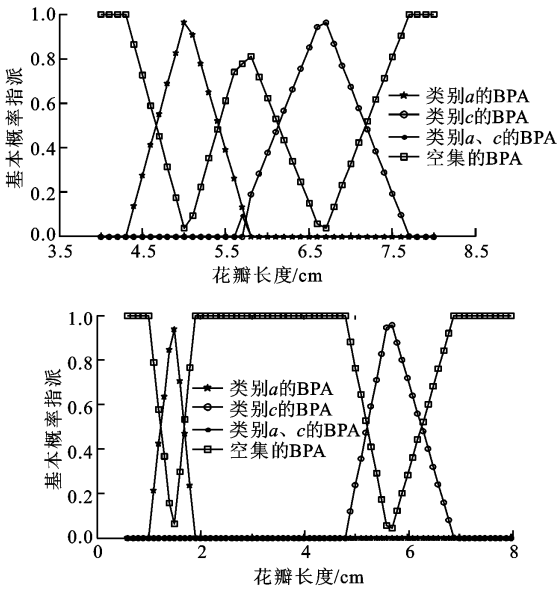


图 5 属性花瓣长度生成的 GBPA

就是辨识框架完整的情况. 仍然使用 iris 数据来说明本方法的应用. 以鸢尾花花萼长度为例,构造出相应的三角模糊数,计算结果如表 1 所示.

如果收到一个样本,例如系统得到一个花萼长度的测量值 5.3,则该推广三角模糊数与其他 7 个三角模糊数之间的相似性计算结果如表 2 所示. 对这些相似性进行归一化,就可以得到基本概率指派函数.

表 1 鸢尾花 3 个种类的花萼长度的三角模糊数值

属性	Setosa(a)	Versicolor(b)	Virginica(c)
SL	(4.30,5.03,5.80)	(4.90,6.01,7.10)	(5.40,6.68,7.90)

表2 相似性归一化后生成的BPA

推广三角形	归一化值
$\triangle_a$	0.333 7
$\triangle_b$	0.316 5
$\triangle_c$	0.281 6
$\triangle_{ab}$	0.030 7
$\triangle_{bc}$	0.005 2
$\triangle_{ac}$	0.027 2
$\triangle_{abc}$	0.005 2

给出该样本完整的4个属性值为(5.3 cm, 3.5 cm, 1.3 cm, 0.2 cm), 基于弱约束方法所生成的GBPA如表3所示. 由于是在封闭世界, 使用经典Dempster组合规则融合的结果为

$$m(a) = 0.867\ 5; \quad m(b) = 0.094\ 3$$

$$m(c) = 0.012\ 8; \quad m(a, c) = 0.025\ 4$$

最后, 基于信息融合的结果为该样本属于类别a.

表3 某样本4个属性值生成的GBPA

属性	$m(a)$	$m(b)$	$m(c)$
SL	0.333 7	0.316 5	0.281 6
SW	0.316 4	0.250 1	0.273 2
PL	0.669 9	0.237 4	0.088 4
PW	0.699 6	0.212 0	0.065 8

属性	$m(a, b)$	$m(b, c)$	$m(a, c)$	$m(a, b, c)$
SL	0.030 7	0.005 2	0.027 2	0.005 2
SW	0.030 4	0.048 1	0.051 5	0.030 4
PL	0.000 0	0.000 0	0.004 3	0.000 0
PW	0.000 0	0.000 0	0.022 6	0.000 0

5 结 论

本文针对辨识框架不完整情况提出了一种强约束广义基本概率指派赋值方法, 可以生成空集不为零的广义基本概率赋值, 其中空集赋值的大小反映了辨识框架不完整的程度. 如果系统辨识框架完整, 则可以根据所提出的弱约束方法生成基本概率指派. 算例表明了所提出的广义基本概率指派生成方法的有效性.

参考文献:

[1] SHAFER G. A mathematical theory of evidence [M].

NJ, USA: Princeton University Press, 1976.

[2] 韩崇昭, 朱洪艳, 段战胜. 多源信息融合[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[3] VALIN P, RHEAUME F, TREMBLAY C, et al. Comparative implementation of two fusion schemes for multiple complementary FLIR imagery classifiers[J]. Information Fusion, 2006, 7(2): 197-206.

[4] ZHU H W, BASIR O. A novel fuzzy evidential reasoning paradigm for data fusion with applications in image processing [J]. Soft Computing, 2006, 10(12): 1169-1180.

[5] 邓勇, 朱振福, 钟山. 基于证据理论的模糊信息融合及其在目标识别中的应用[J]. 航空学报, 2005, 26(6): 754-758.

DENG Yong, ZHU Zhenfu, ZHONG Shan. Fuzzy information fusion based on evidence theory and its application in target recognition [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica. 2005, 26(6): 754-758.

[6] HAN Deqiang, HAN Chongzhao, YANG Yi. Multiple classifiers fusion based on weighted evidence combination[C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2007:2138-2143.

[7] DENG Yong, JIANG Wen, XU Xiaobin, et al. Determining BPA under uncertainty environments and its application in data fusion [J]. Journal of Electronics: China, 2009, 26(1): 13-17.

[8] 韩崇昭, 韩德强, 介婧. 从生物感知认识到系统工程方法论[J]. 系统工程理论与实践, 2008(增刊): 75-93.

HAN Chongzhao, HAN Deqiang, JIE Jing. From biological cognition and perception to methodologies of system engineering[J]. System Engineering: Theory & Practice, 2008(s): 75-93.

[9] 邓勇, 蒋雯, 韩德强. 广义证据理论的基本框架 [J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(12): 119-124.

DENG Yong, Jiang Wen, HAN Deqiang. Basic frame of generalized evidence theory [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2010, 44(12): 119-124.

[10] CHEN S J, CHEN S M. Fuzzy risk analysis based on similarity measures of generalized fuzzy numbers [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2003, 11(1): 45-56.

[11] DENG Yong, SHI Wenkang, DU Feng, et al. A new similarity measure of generalized fuzzy numbers and its application to pattern recognition [J]. Pattern Recognition Letters, 2004, 25(8): 875-883.

(编辑 武红江)